<u>Preuve</u>. Dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère $\vec{u}(x;y)$, $\vec{v}(x';y')$ et $\vec{w}(x'';y'')$

1) • $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'$ et $\vec{v}.\vec{u} = x'x + y'y$
d'où $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$

• $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}+\vec{w}\ (x'+x'';y'+y'')$ d'où

$$\begin{aligned}\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w}) &= x(x'+x'') + y(y'+y'')\\ &= xx' + xx'' + yy' + yy''\\ &= xx' + yy' + xx'' + yy''\\ &= \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}\end{aligned}$$

• $\vec{u}(x;y)$ et $k\vec{v}(kx';ky')$ d'où

$$\begin{aligned}\vec{u}.(k\vec{v}) &= x(kx') + y(ky')\\ &= kxx' + kyy'\\ &= k\times(xx'+yy')\\ &= k\times(\vec{u}.\vec{v})\end{aligned}$$

On montre de même $(k\vec{u}).\vec{v} = k\times(\vec{u}.\vec{v})$.

• $$\begin{aligned}(\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v}) &= (\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}+(-1)\vec{v})\\ &= \vec{u}.\vec{u} + \vec{u}.((-1)\vec{v}) + \vec{v}.\vec{u} + \vec{v}.((-1)\vec{v})\\ &= \vec{u}^2 - \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{v} - \vec{v}^2\\ &= \vec{u}^2 - \vec{v}^2\end{aligned}$$

• $$\begin{aligned}(\vec{u}+\vec{v})^2 &= (\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}+\vec{v})\\ &= \vec{u}.\vec{u} + \vec{u}.\vec{v} + \vec{v}.\vec{u} + \vec{v}.\vec{v}\\ &= \vec{u}^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2\end{aligned}$$

• $$\begin{aligned}(\vec{u}-\vec{v})^2 &= (\vec{u}-\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v})\\ &= \vec{u}.\vec{u} - \vec{u}.\vec{v} - \vec{v}.\vec{u} + \vec{v}.\vec{v}\\ &= \vec{u}^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2\end{aligned}$$

2) Avec $\vec{u}(x\,;y)$, on a $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2}$ d'où

$$\|\vec{u}\|^2 = x^2+y^2 = xx+yy = \vec{u}\cdot\vec{u}.$$

3) Avec 2) et 1),

$$\begin{aligned}\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 &= (\vec{u}+\vec{v})^2 - \vec{u}^2 - \vec{v}^2\\ &= \vec{u}^2 + 2\,\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^2 - \vec{u}^2 - \vec{v}^2\\ &= 2\,\vec{u}\cdot\vec{v}\end{aligned}$$

Une norme étant indépendante du repère orthonormal utilisé pour la calculer, il en est de même de $\vec{u}\cdot\vec{v}$.

4) Déjà prouvée dans une section précédente.

5) • si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de même sens :

$$\vec{v} = k\vec{u}\quad,\quad k\geqslant 0\quad;$$

par suite,

$$\begin{cases}\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot(k\vec{u}) = k\,\vec{u}^2 = k\,\|\vec{u}\|^2\\ \|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\| = \|\vec{u}\|\times|k|\,\|\vec{u}\| = k\,\|\vec{u}\|^2\end{cases}$$

d'où

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|.$$

• si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de sens contraire,

$$\vec{v} = k\vec{u}\quad,\quad k\leqslant 0\,;$$

par suite,

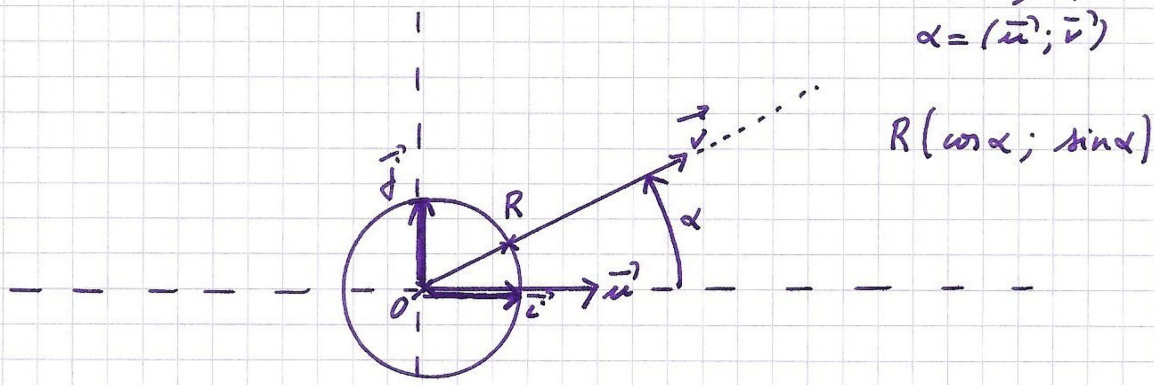
$$\begin{cases}\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot(k\vec{u}) = k\,\vec{u}^2 = k\,\|\vec{u}\|^2\\ -\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\| = -\|\vec{u}\|\times|k|\,\|\vec{v}\| = -\|\vec{u}\|\times(-k)\,\|\vec{v}\|\\ \qquad = k\,\|\vec{u}\|^2\end{cases}$$

d'où

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = -\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|.$$

6) Supposons $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$.
D'après 3), $\vec{u} \cdot \vec{v}$ est indépendant du repère orthonormal utilisé pour le calculer : nous construire un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ adapté (facilitant les calculs).

Soit O un point du plan.
Posons $\vec{i} = \dfrac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$ d'où $\vec{u} = \|\vec{u}\| \, \vec{i}$ et $\|\vec{i}\| = 1$.
Soit $\vec{j}$ de norme 1 et orthogonal à $\vec{i}$.



$\mathcal{C}$ est le cercle trigonométrique de centre O
R est le point d'intersection du cercle $\mathcal{C}$ et de la demi-droite d'origine O et de vecteur directeur $\vec{v}$.

- $\vec{u} = \|\vec{u}\| \, \vec{i} = \|\vec{u}\| \, \vec{i} + 0\vec{j}$ d'où $\vec{u}(\|\vec{u}\| ; 0)$.

- $\vec{v}$ et $\vec{OR}$ sont colinéaires de même sens :

$$\vec{v} = k\,\vec{OR}, \quad k > 0$$

Par suite $\|\vec{v}\| = |k| \times OR = |k| \times 1 = k \times 1 = k$

Ainsi
$$\vec{v} = \|\vec{v}\| \, \vec{OR} = \|\vec{v}\| \left(\cos\alpha \, \vec{i} + \sin\alpha \, \vec{j} \right)$$
$$= \|\vec{v}\| \cos(\alpha) \, \vec{i} + \|\vec{v}\| \sin(\alpha) \, \vec{j}$$

d'où $\vec{v}\left(\|\vec{v}\| \cos(\alpha) ; \|\vec{v}\| \sin(\alpha) \right)$

Finalement, $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \cos(\alpha) + 0 \times \|\vec{v}\| \sin(\alpha)$
$= \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\alpha)$.